

matematică

algebră, geometrie

- Modalități de lucru diferențiate
- Pregătire suplimentară prin planuri individualizate

Caiet de lucru

Partea I

8

Ediția a V-a,
revizuită



Editura Paralela 45

TESTE DE EVALUARE INIȚIALĂ	5
-----------------------------------------	---

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. INTERVALE DE NUMERE REALE. ÎNECUAȚII ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor.....	8
Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor.....	11
Lecția 3. Operații cu intervale de numere reale.....	15
Lecția 4. Inecuații de forma $ax + b > 0$ ($\geq, <, \leq$), $x, a, b \in \mathbb{R}, a \neq 0$	19
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	25
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	27

CAPITOLUL II. CALCUL ALGEBRIC ÎN \mathbb{R}

Lecția 5. Numere reale reprezentate prin litere. Adunarea și scăderea numerelor reale reprezentate prin litere.....	29
Lecția 6. Înmulțirea numerelor reale reprezentate prin litere	34
Lecția 7. Împărțirea numerelor reale reprezentate prin litere	38
Lecția 8. Ridicarea la putere cu exponent natural a numerelor reale reprezentate prin litere ...	42
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	44
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	46
Lecția 9. Formule de calcul prescurtat	48
Lecția 10. Descompunerea în factori.....	54
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	58
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	59
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	61
Lecția 11. Frații algebrice.....	63
Lecția 12. Amplificarea fracțiilor algebrice	66
Lecția 13. Simplificarea fracțiilor algebrice.....	70
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	74
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	75

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

Lecția 1. Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei	77
Lecția 2. Determinarea planului. Relații între puncte, drepte și plane.....	80
Lecția 3. Tetraedrul și piramida	84
Lecția 4. Prisma.....	89
Lecția 5. Cilindrul circular drept. Conul circular drept	95
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	101
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	102
Lecția 6. Pozițiile relative a două drepte în spațiu. Drepte paralele	104
Lecția 7. Unghiul a două drepte în spațiu.....	107
Lecția 8. Pozițiile relative ale unei drepte față de un plan. Dreaptă paralelă cu un plan	112
Lecția 9. Dreaptă perpendiculară pe un plan. Distanța de la un punct la un plan.....	116
Lecția 10. Înălțimea piramidei. Apotema piramidei.....	121
Lecția 11. Înălțimea conului circular drept	126

<i>Teste de evaluare sumativă</i>	130
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	132
Lecția 12. Pozițiile relative a două plane. Plane paralele	134
Lecția 13. Distanța dintre două plane paralele. Înălțimea prisme. Înălțimea cilindrului circular drept	138
Lecția 14. Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate	143
Lecția 15. Trunchiul de piramidă regulată	147
Lecția 16. Trunchiul de con circular drept	152
<i>Teste de evaluare sumativă</i>	157
<i>Fișă pentru portofoliul elevului</i>	159
<i>Probleme din realitatea cotidiană</i>	161

MODELE DE TEZE PENTRU SEMESTRUL I	165
------------------------------------------------	-----

MODELE DE TESTE PENTRU EVALUAREA NAȚIONALĂ	168
---------------------------------------------------------	-----

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI	176
--------------------------------------	-----

Testul 1

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) 1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

- A. $-\sqrt{25} \in \mathbb{N}$; B. $-\sqrt{25} \in \mathbb{Z}$; C. $-\sqrt{25} \notin \mathbb{Q}$; D. $-\sqrt{25} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) 2. Opusul numărului rațional $\frac{8}{5}$ este numărul rațional:

- A. $-\frac{8}{5}$; B. $\frac{5}{8}$; C. $\frac{8}{5}$; D. $-\frac{5}{8}$.

(0,5p) 3. Media aritmetică a numerelor naturale 3 și 6 este egală cu:

- A. 5; B. 2,5; C. 4,5; D. 7.

(0,5p) 4. Soluția ecuației $x^2 = 8$, $x \in \mathbb{R}$, este:

- A. $\{-2, 4\}$; B. $\{-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; C. $\{-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\}$; D. $\{-4, 2\}$.

(0,5p) 5. Dintre numerele raționale pozitive 0,(32), 0,33, 0,3(2) și 0,32, cel mai mare este:

- A. 0,3(2); B. 0,32; C. 0,33; D. 0,(32).

(0,5p) 6. Rezultatul calculului $(2\sqrt{5}) : \sqrt{10} - \sqrt{2}$ este egal cu:

- A. 0; B. $\sqrt{2}$; C. $\sqrt{5}$; D. 3.

(0,5p) 7. În triunghiul ABC notăm cu M și N mijloacele laturilor AB , respectiv AC . Dacă $MN = 7$ cm, atunci BC este egală cu:

- A. 21 cm; B. 3,5 cm; C. 5,5 cm; D. 14 cm.

(0,5p) 8. Într-o urnă sunt 6 bile albe și 9 bile negre. Extrăgând o bilă, probabilitatea ca aceasta să fie albă este egală cu:

- A. $\frac{1}{6}$; B. $\frac{2}{5}$; C. $\frac{3}{4}$; D. $\frac{1}{9}$.

(0,5p) 9. Distanța dintre punctele $A(3; 0)$ și $B(1; 2\sqrt{3})$ exprimată în centimetri este:

- A. $\sqrt{2}$ cm; B. 6 cm; C. 4 cm; D. $\sqrt{3}$ cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) 1. Rezolvați sistemul de ecuații $\begin{cases} 2x + 5y = 1 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$, unde x și y sunt numere reale.

2. Se consideră numărul real $x = \left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} \right) : 2, (6) - \sqrt{\frac{2}{3}}$.

(0,7p) a) Arătați că $x = \frac{\sqrt{6}}{2}$, (0,8p) b) Calculați $m_a(x; x^{-1})$.

3. Notăm cu \mathcal{A}_d aria discului mărginit de cercul $\mathcal{C}(I, r)$ înscris în triunghiul ABC . Știind că $\sphericalangle BAC = 90^\circ$, $AB = 6$ cm și $AC = 8$ cm, calculați:
- (0,7p) a) \mathcal{P}_{ABC} ; (0,8p) b) r ; (0,7p) c) \mathcal{A}_d .

Testul 2

Se acordă 1 punct din oficiu.

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

- (0,5p) 1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:
 A. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{N}$; B. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{Z}$; C. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{Q}$; D. $\sqrt{0,(1)} \in \mathbb{I}$.
- (0,5p) 2. Rezultatul calculului $\sqrt{9} - \sqrt{16}$ este egal cu:
 A. 1; B. -1; C. 7; D. -7.
- (0,5p) 3. Între mulțimile $E = \{0, 1, 2\}$ și $F = \{0, 3, 6\}$ se stabilește o dependență funcțională aplicând regula:
 A. $x \rightarrow x^2$; B. $x \rightarrow 3x$; C. $x \rightarrow 2x$; D. $x \rightarrow x^3$.
- (0,5p) 4. Media geometrică a numerelor 9 și 25 este egală cu:
 A. 12; B. 16; C. 24; D. 15.
- (0,5p) 5. Rotunjirea la a doua zecimală a numărului 3,(5) este egală cu:
 A. 3,66; B. 3,65; C. 3,56; D. 3,55.
- (0,5p) 6. Știind că $5\sqrt{3} = \sqrt{n}$, atunci n este egal cu:
 A. 50; B. 45; C. 75; D. 80.
- (0,5p) 7. Știind că $\sin A = \frac{\sqrt{2}}{2}$, atunci măsura unghiului A este egală cu:
 A. 30° ; B. 45° ; C. 60° ; D. 90° .
- (0,5p) 8. Dintre numerele $4\sqrt{5}$, $5\sqrt{3}$, $6\sqrt{2}$ și $7\sqrt{2}$, cel mai mic este:
 A. $6\sqrt{2}$; B. $4\sqrt{5}$; C. $5\sqrt{3}$; D. $7\sqrt{2}$.
- (0,5p) 9. Dacă $\triangle ABC \sim \triangle DEF$, $AB = 8$ cm, $BC = 12$ cm, $CA = 16$ cm și $DE = 2$ cm, atunci \mathcal{P}_{DEF} este egal cu:
 A. 6 cm; B. 9 cm; C. 8 cm; D. 7 cm.

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

- (0,8p) 1. Rezolvați în \mathbb{Q} ecuația $\frac{x-1}{3} + 2 = 1\frac{1}{4}$.
2. Se consideră mulțimile $A = \{-1, 3\}$ și $B = \{-2, 2\}$.
- (0,7p) a) Determinați mulțimea $A \times B$.
- (0,8p) b) Determinați aria patrulaterului ale cărui vârfuri sunt reprezentările grafice ale elementelor mulțimii $A \times B$ în sistemul de axe ortogonale xOy .
3. În paralelogramul $ABCD$ cu $\sphericalangle A = 150^\circ$, $AB = 12$ cm și $BC = 10$ cm construim înălțimile AE , $E \in BC$ și AF , $F \in CD$. Calculați:
- (0,7p) a) AE și AF ; (0,7p) b) \mathcal{A}_{ABCD} ; (0,8p) c) \mathcal{A}_{AEF} .

Partea I – Scrieți litera corespunzătoare singurului răspuns corect.

(0,5p) 1. Stabiliți care dintre următoarele propoziții este adevărată:

- A. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{N}$; B. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{Z}$; C. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{Q}$; D. $\sqrt{0,5} \in \mathbb{I}$.

(0,5p) 2. Inversul numărului real $-\frac{1}{7}$ este egal cu:

- A. $-\frac{1}{7}$; B. -7 ; C. 7 ; D. $\frac{1}{7}$.

(0,5p) 3. Rezultatul calculului $0,(6) - 1$ este egal cu:

- A. $-\frac{2}{3}$; B. $\frac{1}{3}$; C. $\frac{5}{6}$; D. $-\frac{1}{3}$.

(0,5p) 4. Reprezentând punctul $A(-2; 5)$ în sistemul de axe ortogonale xOy , acesta aparține cadranelui:

- A. IV; B. II; C. I; D. III.

(0,5p) 5. Soluția ecuației $\sqrt{5}x + 3 = 8, x \in \mathbb{R}$, este egală cu:

- A. $\sqrt{5}$; B. $-\sqrt{5}$; C. $-\sqrt{3}$; D. $\sqrt{3}$.

(0,5p) 6. Raționalizând numitorul raportului $\frac{2}{\sqrt{6}}$, obținem raportul:

- A. $\frac{\sqrt{6}}{2}$; B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$; C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$; D. $\frac{\sqrt{3}}{6}$.

(0,5p) 7. Fie $ABCD$ un trapez cu $AB \parallel CD$. Dacă $AB = 9$ cm și $CD = 13$ cm, atunci linia mijlocie a trapezului are lungimea de:

- A. 10 cm; B. 11 cm; C. 14 cm; D. 17 cm.

(0,5p) 8. Produsul cartezian al mulțimilor $A = \{a, b\}$ și $B = \{d\}$ este egal cu:

- A. $\{(a; b), (b; a)\}$; B. $\{(a; b), (a; d)\}$;
C. $\{(a; d), (b; d)\}$; D. $\{(d; a), (d; b)\}$.

(0,5p) 9. Aria triunghiului ABC cu $\sphericalangle A = 90^\circ$, $AB = 3$ cm și $BC = 5$ cm este egală cu:

- A. 8 cm^2 ; B. 4 cm^2 ; C. 9 cm^2 ; D. 6 cm^2 .

Partea a II-a – La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

(0,8p) 1. Aflați lungimea segmentului AB dacă $A(-1; \sqrt{3})$ și $B(2; -2\sqrt{3})$.

2. Se dau numerele $x = \left(\frac{7}{\sqrt{6}} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \right)^3$ și $y = \left(\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{3}} \right) \cdot \frac{5}{6}$.

(0,7p) a) Arătați că $y = \sqrt{6}$; (0,8p) b) Calculați $m_g(x; y)$.

3. În pătratul $ABCD$ cu latura de 8 cm considerăm punctul E situat pe latura AB , astfel încât $BE = 6$ cm. Calculați:

(0,7p) a) \mathcal{A}_{ABCD} ; (0,7p) b) \mathcal{P}_{EBC} ; (0,8p) c) $d(D, CE)$.

INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

Lecția 1. Mulțimi definite printr-o proprietate a elementelor



Citesc și rețin

În clasa a VI-a, la capitolul „Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale” am învățat că o mulțime poate fi definită printr-o proprietate a elementelor acesteia.

Exemplu: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 5\}$. Citim „Mulțimea A este formată din numerele naturale nenule n cu proprietatea $n < 5$ ”.



Cum se aplică?

1. Enumerați elementele mulțimii $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 35 \div x\}$ și precizați cardinalul acesteia.

Soluție:

Divizorii întregi ai lui 35 sunt $\pm 1, \pm 5, \pm 7, \pm 35$, prin urmare $A = \{-35, -7, -5, -1, 1, 5, 7, 35\}$ și $\text{card } A = 8$.

2. Scrieți mulțimea $P = \{2, 3, 5, 7\}$, folosind o proprietate a elementelor acesteia.

Soluție:

Observăm că elementele mulțimii P sunt numerele naturale prime de o cifră, prin urmare mulțimea P se scrie $P = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ este număr prim de o cifră}\}$.

3. Se consideră mulțimile $E = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n < 5^2\}$ și $F = \{a \mid \overline{6a2} \div 3\}$. Efectuați:

- a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

Soluție:

Mai întâi enumerăm elementele mulțimilor E și F . Elementele mulțimii E îndeplinesc condiția $2^n < 5^2$ sau $2^n < 25$, prin urmare $E = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Elementele mulțimii F îndeplinesc condiția $\overline{6a2} \div 3$, deci $3 \mid 6 + a + 2$ sau $3 \mid 8 + a$, de unde rezultă că $F = \{1, 4, 7\}$; a) $E \cup F = \{0, 1, 2, 3, 4, 7\}$; b) $E \cap F = \{1, 4\}$; c) $E \setminus F = \{0, 2, 3\}$; d) $F \setminus E = \{7\}$.

a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m \leq 7\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 7 - m, m \in A\}$;

b) $A = \{m \in \mathbb{N}^* \mid m < 6\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 6 - m, m \in A\}$.

10. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid \overline{ab} : 15\}$ și $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid \overline{cd} : 25\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

11. Se consideră mulțimile $A = \{x \mid \overline{173x8} < \overline{17xx8}\}$ și $B = \{y \mid \overline{51yy3} > \overline{51y63}\}$. Arătați că $B \subset A$.

12. Scrieți submulțimile următoarelor mulțimi:

a) $E = \{x \mid \overline{807x:4}\}$;

b) $F = \{y \mid \overline{14y5:3}\}$.

13. Se consideră mulțimile $E = \{x \mid \overline{120x} : 5\}$ și $F = \{y \mid \overline{62y1} : 9\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $\overline{E \setminus F}$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.

14. Se consideră mulțimea $A = \{xyz \mid xyz = 10n + 9, n \in \mathbb{N}, x \neq 0\}$. Determinați:

a) cel mai mic element al mulțimii A ; b) cel mai mare element al mulțimii A .

15. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab} = b^2, a \neq 0\}$ și $F = \{\overline{xyz} \mid \overline{xyz} = z^3, x \neq 0\}$. Efectuați $E \times F$ și $F \times E$.

16. Se dau mulțimile $C = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^{n+4} < 8^3\}$ și $D = \{n \in \mathbb{N} \mid 3^{n+1} < 9^2\}$. Arătați că $C = D$.

17. Se consideră mulțimile $E = \{\overline{ab}, a \neq 0 \mid (\overline{ab}; 60) = 15\}$ și $F = \{\overline{cd}, c \neq 0 \mid (75; \overline{cd}) = 15\}$. Efectuați:

a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$.

18. Se consideră mulțimile $A = \{xy, x \neq 0 \mid [\overline{xy}; 48] = 144\}$ și $B = \{zt, z \neq 0 \mid [60; \overline{zt}] = 180\}$. Efectuați:

a) $A \cup B$; b) $A \cap B$; c) $A \setminus B$; d) $B \setminus A$.

19. Se dau mulțimile $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 2^{n+3}\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N} \mid 5^n < 3^{n+1}\}$. Arătați că $A = B$.

20. Se dă mulțimea $A = \left\{ \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}, a \neq 0, b \neq 0 \mid \frac{\overline{ab}}{\overline{ba}} = \frac{4}{7} \right\}$. Câte submulțimi are mulțimea A ?

21. Se consideră mulțimile $A = \{3x - 2, x + 5, 5x + 4\}$ și $B = \{3x - 1, x + 4, 4x + 7\}$. Determinați numărul natural $x, x \geq 1$, pentru care $A = B$.

22. Se consideră mulțimea $E = \{\overline{ab} \mid \overline{ab}$ este număr prim și $\overline{ab} + \overline{ab}^3 : 10, a \neq 0\}$. Determinați card E .

23. Efectuați $A \cap B$, știind că $A = \{a \mid a = 2^n + 3^{n+1}, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 2^{n+2} + 3^n, n \in \mathbb{N}\}$.

24. Se consideră mulțimile $E = \{a \mid a = 5n - 1, n \in \mathbb{N}^*\}$ și $F = \{b \mid b = n^2 + 1, n \in \mathbb{N}\}$. Arătați că $E \cap F = \emptyset$.

25. Arătați că $A = B$, știind că $A = \{a, b, c\}$ și $B = \{x, y, z\}$, iar a, b, c, x, y, z sunt numere prime care verifică condițiile: $a + x = b + y = c + z$ și $a + b + c + x + y + z = \overline{a0}$.

26. Se consideră mulțimile $A = \{a \mid a = 3p + 2, p \in \mathbb{N}\}$, $B = \{b \mid b = 5q + 1, q \in \mathbb{N}\}$ și $C = \{c \mid c = 15t + 11, t \in \mathbb{N}\}$. Efectuați $C \setminus (A \cap B)$.

27. Determinați mulțimea $A = \left\{ \overline{abcd} \mid \sqrt{\overline{abcd}} + \sqrt{\overline{bcd}} + \sqrt{\overline{cd}} = 105, a \neq 0, b \neq 0, c \neq 0 \right\}$.

(I. Tudor, *Gazeta Matematică* nr. 7/2007)



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Enumerați elementele următoarelor mulțimi și precizați cardinalul acestora:
 a) $A = \{m \in \mathbb{N} \mid m < 6\}$; b) $B = \{n \in \mathbb{Z}^* \mid |n| \leq 4\}$.
- (3p) 2. Se consideră mulțimile $E = \{x \mid \overline{71x} : 5\}$ și $F = \{y \mid \overline{8y5} : 3\}$. Efectuați:
 a) $E \cup F$; b) $E \cap F$; c) $E \setminus F$; d) $F \setminus E$; e) $E \times F$; f) $F \times E$.
- (3p) 3. Se consideră mulțimea $A = \{n \mid 3^n < 2^{n+2}\}$. Câte submulțimi are mulțimea A ?

Lecția 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor



Citesc și rețin

Definiții:

Fie a și b două numere reale, cu $a < b$. Definim:

- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (**interval închis** de extremități a și b);
- $(a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (**interval deschis** de extremități a și b);
- $(a; b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (**interval deschis la stânga și închis la dreapta** de extremități a și b);
- $[a; b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (**interval închis la stânga și deschis la dreapta** de extremități a și b).

Intervalele de tipul: $[a; b]$, $(a; b)$, $(a; b]$, $[a; b)$ se numesc intervale **mărginite** și au ca reprezentare geometrică pe axa numerelor un segment, ca în figurile următoare:

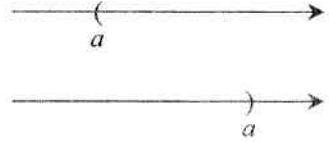
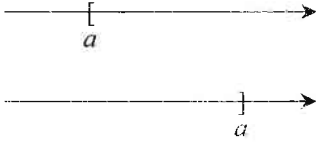


Definiții:

Fie a un număr real. Definim:

- $[a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$ (interval **închis la stânga și nemărginit la dreapta**);
- $(a; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$ (interval **deschis la stânga și nemărginit la dreapta**);
- $(-\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$ (interval **nemărginit la stânga și închis la dreapta**);
- $(-\infty; a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$ (interval **nemărginit la stânga și deschis la dreapta**).

Intervalele de tipul: $[a; +\infty)$, $(a; +\infty)$, $(-\infty; a]$, $(-\infty; a)$ se numesc intervale **nemărginite** și au ca reprezentare geometrică pe axa numerelor o semidreaptă, ca în figurile următoare:



Conform definiției modulului, pentru $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ avem:

- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq a\} = [-a; a]$; • $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| < a\} = (-a; a)$;
- $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq a\} = (-\infty; -a] \cup [a; +\infty)$; • $\{x \in \mathbb{R} \mid |x| > a\} = (-\infty; -a) \cup (a; +\infty)$.



Cum se aplică?

1. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 1\}$;

b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2013\}$;

c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 4\}$;

d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 2\}$.

Soluție:

a) $A = [-1; 1)$; b) $B = (-\infty; -2013)$; c) $C = [-4; 4]$; d) $D = (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

a) $-7 \in [-7; 1)$;

b) $6 \in (-2; 6)$;

c) $\{-\sqrt{5}, 8\} \subset [-\sqrt{5}; 9)$;

d) $\{-1, \sqrt{2}\} \subset (-1; \sqrt{2}]$.

Soluție:

a) A;

b) F;

c) A;

d) F.

3. Scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\sqrt{3}\}$ și arătați că $-6\sqrt{2} \in A$.

Soluție:

$A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 5\sqrt{3}\} = [-5\sqrt{3}; 5\sqrt{3}]$. Observăm că $-5\sqrt{3} = -\sqrt{75}$ și $-6\sqrt{2} = -\sqrt{72}$, deci $-5\sqrt{3} < -6\sqrt{2}$, prin urmare $-5\sqrt{3} < -6\sqrt{2} < 5\sqrt{3}$, de unde rezultă că $-6\sqrt{2} \in A$.

Exerciții și probleme de dificultate minimă
1. Citiți următoarele propoziții:

- a) $(-1; 8)$; b) $[0; 7]$; c) $(2; 9]$; d) $[-6; 7)$;
 e) $(-\infty; 4)$; f) $(-\infty; \sqrt{2}]$; g) $(\sqrt{7}; +\infty)$; h) $[5; +\infty)$.

2. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $(-4; 5) = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x < 5\}$; b) $[-7; 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leq x \leq 2\}$;
 c) $[-3; 8) = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 8\}$; d) $(-6; 9] = \{x \in \mathbb{R} \mid -6 < x \leq 9\}$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții:

- a) $(-\infty; 13] = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 13\}$; b) $(-1; +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$;
 c) $(-\infty; -\sqrt{3}) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -\sqrt{3}\}$; d) $[-\sqrt{6}; +\infty) = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \geq -\sqrt{6}\}$.

4. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 4\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid \sqrt{2} \leq x \leq 9\} = \dots\dots\dots$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 \leq x < 6\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq \sqrt{3}\} = \dots\dots\dots$

5. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -17\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -23\} = \dots\dots\dots$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 5\sqrt{2}\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\sqrt{7}\} = \dots\dots\dots$

6. Scrieți sub formă de intervale mulțimile:

- a) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 15\} = \dots\dots\dots$; b) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq -4\} = \dots\dots\dots$;
 c) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 31\} = \dots\dots\dots$; d) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leq 0\} = \dots\dots\dots$

7. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $-2 \in [-2; 7)$; b) $3 \in (-8; 3)$; c) $-1 \notin (-1; 9]$;
 d) $5 \notin [-6; 5]$; e) $0 \in (-3; 0)$; f) $-4 \in (-4; 7]$.

8. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\{-3, 5\} \subset [-3; 5]$; b) $\{-4, 3\} \subset (-4; 3)$;
 c) $\{-7, 2\} \subset [-7; 2)$; d) $\{-6, 8\} \subset (-6; 8]$.

9. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $15 \in [10; 25)$; b) $23 \in [19; 22]$; c) $-8 \in (-9; 7]$; d) $-5 \notin (-4; 0)$;
 e) $\sqrt{2} \in (-1; 2)$; f) $\sqrt{3} \notin (-3; 1)$; g) $\sqrt{5} \in [-1; 2]$; h) $\sqrt{7} \in [-3; 3]$.

10. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\frac{4}{3} \in \left[\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right]$; b) $\frac{5}{3} \in \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$; c) $\frac{1}{3} \in \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$.

11. Stabiliți valoarea de adevăr a propozițiilor:

- a) $\frac{7}{3} \in \left(\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$; b) $\frac{7}{9} \in \left[\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$; c) $\frac{7}{5} \in \left[\frac{7}{8}; \frac{7}{4}\right)$.

- a) \mathbb{Z} ; b) \mathbb{I} ; c) \mathbb{Q}

13. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții. Intervalul $(-3; 4)$ conține o infinitate de elemente care aparțin mulțimii:

- a) \mathbb{N} ; b) \mathbb{Z} ; c) \mathbb{Q} ; d) \mathbb{I} ; e) \mathbb{R} .

14. i) Completați spațiile punctate cu cel mai mare număr natural din intervalele:

- a) $[-9; 5)$; b) $(-3; 8]$; c) $[-6; 4]$; d) $(-6; 9)$

ii) Completați spațiile punctate cu cel mai mic număr întreg din intervalele:

- a) $(-8; -1)$; b) $[-5; 0]$; c) $(-9; -4]$; d) $[-3; 7)$

15. i) Completați spațiile punctate cu cel mai mare număr întreg care nu aparține intervalului:

- a) $[52; +\infty)$; b) $(87; +\infty)$; c) $(-4; +\infty)$; d) $[-6; +\infty)$

ii) Completați spațiile punctate cu cel mai mic număr întreg care nu aparține intervalului:

- a) $(-\infty; 35]$; b) $(-\infty; 27]$; c) $(-\infty; -8]$; d) $(-\infty; -5)$

Exerciții și probleme de dificultate medie

16. i) Calculați produsul dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalele:

- a) $[-8; -2]$; b) $[-5; -3]$; c) $(-7; -4]$; d) $(-9; -6)$.

ii) Calculați suma dintre cel mai mic și cel mai mare număr întreg din intervalele:

- a) $[-7; -2)$; b) $(-9; -3]$; c) $[-7; -5]$; d) $(-8; -1)$.

17. Arătați că:

a) $2\sqrt{5} \in (3\sqrt{2}; 2\sqrt{7})$; b) $3\sqrt{3} \in [2\sqrt{5}; 4\sqrt{2})$; c) $6\sqrt{2} \in (5\sqrt{3}; 4\sqrt{5})$.

18. Arătați că:

a) $2^{23} \in (4^{11}; 16^6)$; b) $3^{19} \in (27^6; 9^{10})$; c) $5^{10} \in (2^{20}; 3^{15})$; d) $3^{45} \in (5^{30}; 2^{75})$.

19. Arătați că suma fracțiilor ordinare cu numitorul 3 care aparțin intervalului $[2; 4)$ este un număr natural.

20. Calculați suma fracțiilor ordinare cu numărătorul 2 care aparțin intervalului $(\frac{1}{4}; \frac{1}{2})$.

21. Determinați numărul natural n pentru care următoarele propoziții sunt adevărate:

a) $2^{13} \cdot 5^8 \in (10^n; 10^{n+1})$; b) $2^{11} \cdot 5^{14} \in (10^n; 10^{n+1})$; c) $2^{16} \cdot 5^9 \in (10^n; 10^{n+1})$.

22. Arătați că:

a) $\sqrt{(x+5)^2} + \sqrt{(x-3)^2} = 8$, pentru $x \in [-5; 3]$;

b) $\sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-7)^2} = 9$, pentru $x \in [-2; 7]$.

23. Arătați că:

a) $3 \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{4}{1 \cdot 3} + \frac{4}{3 \cdot 5} + \frac{4}{5 \cdot 7} + \dots + \frac{4}{43 \cdot 45} \right) \in (7; 8)$;

b) $1\frac{1}{5} : \left(\frac{2}{1 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{2}{52 \cdot 55} \right) \in (1; 2)$.

24. Știind că x și y sunt două numere reale pozitive, arătați că $\sqrt{xy} \in \left[\frac{2xy}{x+y}; \frac{x+y}{2} \right]$.

25. Se consideră numărul $a = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Arătați că $a \in (0; 1)$.

Exerciții și probleme de dificultate avansată

26. Se consideră numărul $a = \left(\frac{1}{1}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{n}\right)^2$, $n \in \mathbb{N}$ și $n > 1$. Arătați

că $a \in \left[\frac{5}{4}; \frac{7}{4} \right)$.

27. Arătați că $2^{75} \in (10^{22}; 10^{23})$ și precizați câte cifre are numărul natural 2^{75} scris în baza 10.



Ce notă merit?

Test de evaluare stadială

Se acordă 1 punct din oficiu.

- (3p) 1. Scrieți sub formă de intervale de numere reale mulțimile:
- a) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 1\}$; b) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid -8 < x < 2\}$;
c) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -2019\}$.
- (3p) 2. Scrieți sub formă de interval de numere reale mulțimea $A = \{x \in \mathbb{R} \mid |x| < 11\}$ și determinați cel mai mare număr $p \in \mathbb{N}$ pentru care $[-p; p] \subset A$.
- (3p) 3. Arătați că suma fracțiilor ordinare cu numărătorul 7 care aparțin intervalului $(1; 3)$ este un număr natural.

Lecția 3. Operații cu intervale de numere reale



Citesc și rețin

Deoarece intervalele de numere reale sunt mulțimi de numere reale înseamnă că se poate defini **reuniunea**, **intersecția** și **diferența** acestora.

Reuniunea intervalelor

Reuniunea intervalelor A și B este intervalul notat $A \cup B$, care conține acele elemente care aparțin cel puțin unuia dintre intervalele A și B .

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ sau } x \in B\}$$